

Inversion et courbes de Bézier rationnelles à poids complexes

Jean-Paul BECAR¹, Laurent FUCHS², Lionel GARNIER³

¹ LAMAV FR2956, EA 4015, Université de Valenciennes France
jean-paul.becar@uphf.fr

² XLIM, UMR 7252, Université de Poitiers,
laurent.fuchs@univ-poitiers.fr

³ L.I.B., Université de Bourgogne, B.P. 47870, 21078 Dijon Cedex, France,
lionel.garnier@u-bourgogne.fr

Résumé

L'article traite de transformations non affines appliquées à des courbes planes rationnelles. Les effets de l'inversion sont ici examinés sur des courbes de Bézier rationnelles à poids complexes. En géométrie de la C.A.O., les transformations affines appliquées aux courbes et surfaces de Bézier rationnelles n'augmentent pas leurs degrés ce qui n'est pas le cas lors de l'usage de transformations non affines et de leur compositions. Le cas d'étude concerne l'inversion appliquées aux courbes représentées par des courbes de Bézier rationnelles à poids complexes. Sur des courbes quadratiques à poids réels, la composition de deux inversions a pour effet de quadrupler le degré alors que le degré est inchangé en exploitant la représentation à l'aide de poids complexes. L'algorithme de De Casteljau est aussi adapté à ce mode en séparant pour l'affichage final, les parties réelles et imaginaires. Une implémentation en utilisant du JavaScript et un canevas dans une page HTML5 est disponible ici : http://ufrsciencetech.u-bourgogne.fr/licencel/Info1B_ConceptionDeSitesWeb/BezierMassiqueJavascript/bezier.html

Mots-clés : Courbes de Bézier rationnelles, points massiques, poids complexes, inversion

1 Introduction

En géométrie de la CAO, les transformations affines appliquées aux courbes et surfaces de Bézier rationnelles n'augmentent pas leurs degrés. Ceci n'est pas le cas lors de l'usage d'une transformation non affine, comme l'inversion par exemple, et de leur composition ([GD13]). Le document présente l'inversion appliquée aux courbes de Bézier. L'écriture complexe de l'inversion et la représentation des courbes de Bézier rationnelles à poids complexes assurent la cohérence des calculs d'une part et facilitent les tracés des courbes d'autre part : en effet, les degrés des courbes restent inchangés. Leur représentation dans le domaine réel donnera naissance à des courbes de degré double. Les courbes de Bézier rationnelles à poids réels quelconques ont fait l'objet de nombreux travaux ([Béc97, BFG19a, BFG19b, BG14, FJ89, FJ92, GB16]). Certains auteurs ont choisi un mode de représentation des

courbes de Bézier rationnelles où les poids sont complexes voir ([SR09]). Ici, les auteurs utilisent la représentation des courbes de Bézier rationnelles massiques à poids complexes. La section 2 fournit le cadre général à la description de ces courbes. L'inversion n'a pas d'effet sur le degré des courbes et bien que les poids soient complexes, l'algorithme de De Casteljau peut être adapté. Avant de conclure et de donner des perspectives, la section 3 montre, en fonction du pôle de l'inversion, l'image d'une courbe de Bézier de degré 2 modélisant une branche d'hyperbole par cette dernière et nous obtenons une lemniscate de Bernoulli ou un limaçon de Pascal représentée par une courbe de Bézier quadratique alors que le degré de cette courbe de Bézier serait quartique en utilisant que des poids réels. Le dernier exemple montre l'image d'une courbe de Bézier quadratique représentant une branche d'hyperbole par la composition de deux inversions et le degré de la courbe de Bézier image est 2 alors qu'il serait de 8 en utilisant des poids réels. Pour obtenir toute la courbe, nous utilisons un changement de paramètre quadratique qui double le degré. Via ce changement, nous obtenons une courbe quartique au

lieu d'avoir une courbe de degré 16. De plus, l'adaptation de l'algorithme de De Casteljaou nous permet de calculer les points de la courbe sans augmenter le degré.

2 Le cadre général

2.1 Ensemble $\tilde{\mathbb{C}}$ des nombres complexes massiques

Dans ce paragraphe, nous construisons l'ensemble des nombres complexes massiques $\tilde{\mathbb{C}}$, en tant que l'union du plan réel muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$, et du plan vectoriel muni de la base orthonormé directe $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$, où un vecteur $\vec{u}(a; b)$ est représenté par le nombre complexe :

$$z_{\vec{u}} = a + \imath b = a 1_{\mathbb{R}} + b \imath$$

et un point pondéré $M(a; b)$, de poids ω , a pour affixe pondérée :

$$\tilde{z}_M = a + \imath b + \omega \kappa = a 1_{\mathbb{R}} + b \imath + \omega \kappa$$

et, un nombre complexe massique est de la forme

$$\tilde{z} = z + \omega \kappa$$

où $(z; \omega) \in \mathbb{C}^2$: si $\omega = 0$, \tilde{z} représente le vecteur du plan d'affixe z tandis que dans l'autre cas, \tilde{z} représente le point pondéré d'affixe z et de poids ω . Naturellement, nous avons $\mathbb{C} \subset \tilde{\mathbb{C}}$ et les nombres complexes sont les nombres complexes massiques de masse nulle. Il reste à adapter l'addition et la multiplication par un scalaire. Soit $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$ et $\tilde{z}_2 = z_2 + \omega_2 \kappa$ deux complexes massiques. Alors :

- $\omega_1 + \omega_2 = 0$ et $\omega_1 \omega_2 \neq 0$ implique :

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 - \omega_1 \kappa) = \omega_1 (z_1 - z_2)$$

qui représente le vecteur d'affixe $\omega_1 (z_1 - z_2)$;

- $(z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_1 - \omega_1 \kappa) = 0$;

- $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$ implique :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 &= (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus (z_2 + \omega_2 \kappa) \\ &= \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2) + (\omega_1 + \omega_2) \kappa \end{aligned}$$

qui représente le point pondéré d'affixe $\frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (\omega_1 z_1 + \omega_2 z_2)$ et de poids $\omega_1 + \omega_2$;

- $\omega_1 = \omega_2 = 0 \implies \tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = z_1 + z_2$ qui représente le vecteur d'affixe $z_1 + z_2$;

- $\omega_1 \neq 0$ et $\omega_2 = 0$ implique :

$$\tilde{z}_1 \oplus \tilde{z}_2 = (z_1 + \omega_1 \kappa) \oplus z_2 = z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2 + \omega_1 \kappa$$

qui représente le point pondéré d'affixe $z_1 + \frac{1}{\omega_1} z_2$ et de poids ω_1 .

Evidemment, l'addition \oplus est commutative. Nous définissons la multiplication par un scalaire, notée \boxtimes , de la façon suivante :

- $\alpha = 0 \implies \alpha \boxtimes \tilde{z}_1 = 0$
- $\alpha \neq 0$ et $\omega_1 = 0 \implies \alpha \boxtimes \tilde{z}_1 = \alpha z_1$;
- $\alpha \times \omega_1 \neq 0 \implies \alpha \boxtimes \tilde{z}_1 = z_1 + \alpha \omega_1 \kappa$.

Si le point pondéré M_1 a pour affixe $\tilde{z}_1 = z_1 + \omega_1 \kappa$ alors le vecteur \vec{OM}_1 a pour affixe z_1 c'est-à-dire que :

$$z_1 = \frac{1}{\omega_1} \boxtimes \tilde{z}_1 \oplus -\kappa = (z_1 + \kappa) \oplus (0 - \kappa) \quad (1)$$

2.2 l'algorithme de De casteljaou

L'algorithme 1 détaille les étapes de l'algorithme de De Casteljaou pour la construction d'un point d'une courbe de Bézier quadratique à points massiques complexes de contrôle.

Algorithme 1 Algorithme de De Casteljaou dans l'espace des points massiques complexes, cas quadratique.

Entrée : Trois complexes massiques \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 et \tilde{z}_2 .

1. Choix de t dans $]0; 1[$
2. Calcul de $\tilde{p}_0 = (1 - t) \boxtimes \tilde{z}_0 \oplus t \boxtimes \tilde{z}_1$
3. Calcul de $\tilde{p}_1 = (1 - t) \boxtimes \tilde{z}_1 \oplus t \boxtimes \tilde{z}_2$
4. Calcul de $\tilde{q}_0 = (1 - t) \boxtimes \tilde{p}_0 \oplus t \boxtimes \tilde{p}_1$

Sortie : Un complexe massique q_0 de l'arc de conique modélisé par la courbe de Bézier de points complexes massiques \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 et \tilde{z}_2 .

Pour obtenir toute la courbe à partir d'un arc de courbe de Bézier, nous utilisons un changement de paramètre quadratique, annexe A, qui a pour effet de doubler le degré de la courbe initiale. Ainsi, l'algorithme 2 détaille les étapes de l'algorithme de De Casteljaou pour la construction d'un point d'une courbe de Bézier quartique à points massiques complexes de contrôle.

2.3 Inversion dans le plan complexe



Définition 1 : Inversion

Soit $\Omega(z_\Omega)$ et k un réel non nul. Soit M un point distinct de Ω .

L'image du point $M(z)$ par l'inversion de pôle Ω et de rapport k est $M'(z')$ défini

Algorithme 2 Algorithme de De Casteljaou dans l'espace des points massiques complexes, cas quartique.

Entrée : Cinq complexes massiques $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ et \tilde{z}_4 .

1. Choix de t dans $]0; 1[$
2. Calcul de $\tilde{p}_0 = (1-t) \square \tilde{z}_0 \oplus t \square \tilde{z}_1$
3. Calcul de $\tilde{p}_1 = (1-t) \square \tilde{z}_1 \oplus t \square \tilde{z}_2$
4. Calcul de $\tilde{p}_2 = (1-t) \square \tilde{z}_2 \oplus t \square \tilde{z}_3$
5. Calcul de $\tilde{p}_3 = (1-t) \square \tilde{z}_3 \oplus t \square \tilde{z}_4$
6. Calcul de $\tilde{q}_0 = (1-t) \square \tilde{p}_0 \oplus t \square \tilde{p}_1$
7. Calcul de $\tilde{q}_1 = (1-t) \square \tilde{p}_1 \oplus t \square \tilde{p}_2$
8. Calcul de $\tilde{q}_2 = (1-t) \square \tilde{p}_2 \oplus t \square \tilde{p}_3$
9. Calcul de $\tilde{r}_0 = (1-t) \square \tilde{q}_0 \oplus t \square \tilde{q}_1$
10. Calcul de $\tilde{r}_1 = (1-t) \square \tilde{q}_1 \oplus t \square \tilde{q}_2$
11. Calcul de $\tilde{s}_0 = (1-t) \square \tilde{r}_0 \oplus t \square \tilde{r}_1$

Sortie : Un complexe massique s_0 de l'arc de conique modélisé par la courbe de Bézier de points complexes massiques $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3$ et \tilde{z}_4 .

par :

$$z' - z_\Omega = \frac{k}{z - z_\Omega} \quad (2)$$

Si le rapport k de l'inversion $i_{\Omega,k}$ de pôle Ω est strictement positif, l'ensemble des points invariants par $i_{\Omega,k}$ est l'ensemble des complexes z qui vérifient

$$(z - z_\Omega) \overline{z - z_\Omega} = k \quad (3)$$

et nous obtenons le cercle $\mathcal{C}_{\Omega, \sqrt{k}}$ de centre Ω et de rayon \sqrt{k} .

Le tableau 1 montre quelques images d'une conique par inversion [Fer19].

2.4 Inversion d'une courbe quadratique

Soit la fonction χ définie sur \mathbb{C} par $\chi(0) = 1$ et pour z non nul, $\chi(z) = z$. L'expression d'une courbe de Bézier rationnelle de degré n en complexe est :

$$z(t) = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} \sum_{j=0}^n \chi(\omega_j) B_{j,n}(t) z_j$$

où $B_{j,n}$ est le j^{eme} polynôme de Bernstein de degré n . Nous pouvons énoncer :

♥ Théorème 1 :

Soit $i_{\Omega,k}$ l'inversion de pôle $\Omega(z_\Omega)$ et de rapport k non nul. Soit γ la courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle $\tilde{P}_j(z_j)$ de poids ω_j où $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Alors $i_{\Omega,k}(\gamma)$ est la courbe de Bézier de degré n de points massiques de contrôle $\tilde{Q}_j(z_j)$ de poids :

$$\varpi_j = \overline{\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega} \quad (4)$$

où $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$ avec :

$$Z_j = \frac{z_\Omega \varpi_j + k \overline{\omega_j}}{\chi(\varpi_j)} \quad (5)$$

Pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, les nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\tilde{Z}_j = \frac{z_\Omega \varpi_j + k \overline{\omega_j}}{\chi(\varpi_j)} + \overline{\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega} \kappa \quad (6)$$

courbe de départ	centre d'inversion	courbe inverse
droite	hors de la droite	cercle
cercle	hors du cercle	cercle
conique	sur la conique	cubique circulaire rationnelle
		droite si le pôle est en un sommet de la conique
hyperbole	sur l'hyperbole	cubique circulaire à point double
hyperbole équilatère	sur l'hyperbole	strophoïde
		droite si le pôle est en un sommet de l'hyperbole
hyperbole d'excentricité 2	sommet	trisectrice de Maclaurin
parabole	sur la parabole	cissoïde
		droite si le pôle est en un sommet de la parabole
ellipse	sur l'ellipse	cubique circulaire rationnelle à point isolé
conique non circulaire	hors de la conique	quartique bicirculaire rationnelle
conique non circulaire	foyer	limaçon de Pascal
parabole	foyer	cardioïde
conique à centre	centre	courbe de Booth
hyperbole équilatère	centre	lemniscate de Bernoulli

Table 1: Image d'une droite et de quelques coniques par inversion [Fer19].

3 Exemples

Dans cet article, nous montrons des exemples de courbes de Bézier de degré 2, l'utilisation de degré supérieur se fait de la même manière.

3.1 Lemniscate de Bernoulli à partir d'une hyperbole

D'après le tableau 1, une Lemniscate de Bernoulli est l'image d'une hyperbole équilatère dont le pôle de l'inversion et le centre de l'hyperbole. Considérons la branche d'hyperbole modélisée par la courbe de Bézier de points complexes massiques de contrôle :

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 = 2i \\ \tilde{z}_1 = \kappa \\ \tilde{z}_2 = 2 \end{cases}$$

L'affixe du pôle (resp. rapport) de l'inversion est $z_\Omega = 0$ (resp. 2). Nous obtenons :

$$\begin{cases} \varpi_0 = \overline{\tilde{z}_0} = -2i \\ \varpi_1 = \overline{\tilde{z}_1} = 0 \\ \varpi_2 = \overline{\tilde{z}_2} = 2 \end{cases}$$

d'une part et :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_1 = \frac{1(k + 0 \times \overline{0})}{1} = k = 2 \\ Z_2 = 0 \end{cases}$$

d'autre part. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_0 = -2i\kappa \\ \widetilde{Z}_1 = 2 \\ \widetilde{Z}_2 = 2\kappa \end{cases} \quad (7)$$

L'équation (quadratique) complexe de la branche d'hyperbole est :

$$z(t) = \frac{(-1-i)t^2 + 2 \times it - i}{t^2 - t}$$

L'équation (quadratique) complexe de la boucle de la Lemniscate de Bernoulli est :

$$z_B(t) = \frac{k(t-t^2)}{(1-i)t^2 + 2it - i}$$

tandis que l'équation réelle quartique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{2t^3(1-t)}{t^4 + (t-1)^4} \\ y(t) = \frac{2t(1-t)(t-1)^2}{t^4 + (t-1)^4} \end{cases}$$

La figure 1 montre la branche d'hyperbole et la boucle de la Lemniscate de Bernouilli, obtenue par inversion de la branche d'hyperbole précitée. Le cercle en pointillé est le cercle d'inversion c'est-à-dire l'ensemble des points invariants par cette inversion.

En utilisant le corollaire 1, toute l'hyperbole est représentée par une courbe de Bézier quartique de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{Z}_{H,0}$, $\widetilde{Z}_{H,1}$, $\widetilde{Z}_{H,2}$, $\widetilde{Z}_{H,3}$ et $\widetilde{Z}_{H,4}$.

$$\widetilde{Z}_{H,0} = \widetilde{z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2$$

$$= 2\iota \oplus -2 \boxtimes \kappa \oplus 2$$

$$= 2 + 2\iota \oplus -2\kappa$$

$$= -1 - \iota - 2\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{H,1} = \widetilde{z}_0 \oplus -1 \boxtimes \widetilde{z}_1$$

$$= 2\iota \oplus -1 \boxtimes \kappa$$

$$= 2\iota \oplus -\kappa$$

$$= -2\iota - \kappa$$

$$\widetilde{Z}_{H,2} = \frac{1}{3} \boxtimes \widetilde{z}_0 \oplus \frac{2}{3} \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \frac{-1}{3} \boxtimes \widetilde{z}_2$$

$$= \frac{1}{3} \boxtimes 2\iota \oplus \frac{2}{3} \boxtimes \kappa \oplus \frac{-1}{3} \boxtimes 2$$

$$= \frac{2}{3}\iota \oplus \frac{2}{3}\kappa \oplus \frac{-2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}(-1 + \iota) \oplus \frac{2}{3}\kappa$$

$$= -1 + \iota + \frac{2}{3}\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{H,3} = -1 \boxtimes \widetilde{z}_0 \oplus \widetilde{z}_1$$

$$= -1 \boxtimes 2\iota \oplus \kappa$$

$$= -2\iota \oplus \kappa$$

$$= -2\iota + \kappa$$

$$\widetilde{Z}_{H,4} = \widetilde{z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2$$

$$= \widetilde{Z}_{H,0}$$

$$= -1 - \iota - 2\kappa$$

En utilisant le corollaire 1, toute la Lemniscate de Bernouilli est représentée par une courbe de Bézier quartique de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{Z}_{L,0}$, $\widetilde{Z}_{L,1}$, $\widetilde{Z}_{L,2}$, $\widetilde{Z}_{L,3}$ et $\widetilde{Z}_{L,4}$.

$$\widetilde{Z}_{L,0} = \widetilde{Z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{Z}_1 \oplus \widetilde{Z}_2$$

$$= -2\iota\kappa \oplus -2 \boxtimes 2 \oplus 2\kappa$$

$$= 2(1 - \iota)\kappa \oplus -4$$

$$= -\frac{2}{1-\iota} + 2(1 - \iota)\kappa$$

$$= -\frac{2(1+\iota)}{2} + 2(1 - \iota)\kappa$$

$$= -1 - \iota + 2(1 - \iota)\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{L,1} = \widetilde{Z}_0 \oplus -1 \boxtimes \widetilde{Z}_1$$

$$= -2\iota\kappa \oplus -1 \boxtimes 2$$

$$= -2\iota\kappa \oplus -2$$

$$= \frac{1}{\iota} - 2\iota\kappa$$

$$= -\iota - 2\iota\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{L,2} = \frac{1}{3} \boxtimes \widetilde{Z}_0 \oplus \frac{2}{3} \boxtimes \widetilde{Z}_1 \oplus \frac{-1}{3} \boxtimes \widetilde{Z}_2$$

$$= \frac{1}{3} \boxtimes -2\iota\kappa \oplus \frac{2}{3} \boxtimes 2 \oplus \frac{-1}{3} \boxtimes 2\kappa$$

$$= \frac{-2}{3}\iota\kappa \oplus \frac{4}{3} \oplus \frac{-2}{3}\kappa$$

$$= \frac{-2}{3}(1 + \iota)\kappa \oplus \frac{4}{3}$$

$$= \frac{-2}{1 + \iota} + \frac{-2}{3}(1 + \iota)\kappa$$

$$= \frac{-2}{2}(1 - \iota) + \frac{-2}{3}(1 + \iota)\kappa$$

$$= -1 + \iota + \frac{-2}{3}(1 + \iota)\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{L,3} = -1 \boxtimes \widetilde{Z}_0 \oplus \widetilde{Z}_1$$

$$= -1 \boxtimes -2\iota\kappa \oplus 2$$

$$= 2\iota\kappa \oplus 2$$

$$= \frac{1}{\iota} + 2\iota\kappa$$

$$= -\iota + 2\iota\kappa$$

$$\widetilde{Z}_{L,4} = \widetilde{Z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{Z}_1 \oplus \widetilde{Z}_2$$

$$= \widetilde{Z}_{L,0}$$

$$= -1 - \iota + 2(1 - \iota)\kappa$$

La figure 2 montre l'hyperbole et la Lemniscate de Bernouilli, obtenue par changement de paramètre quartique des deux courbes de la figure 1.

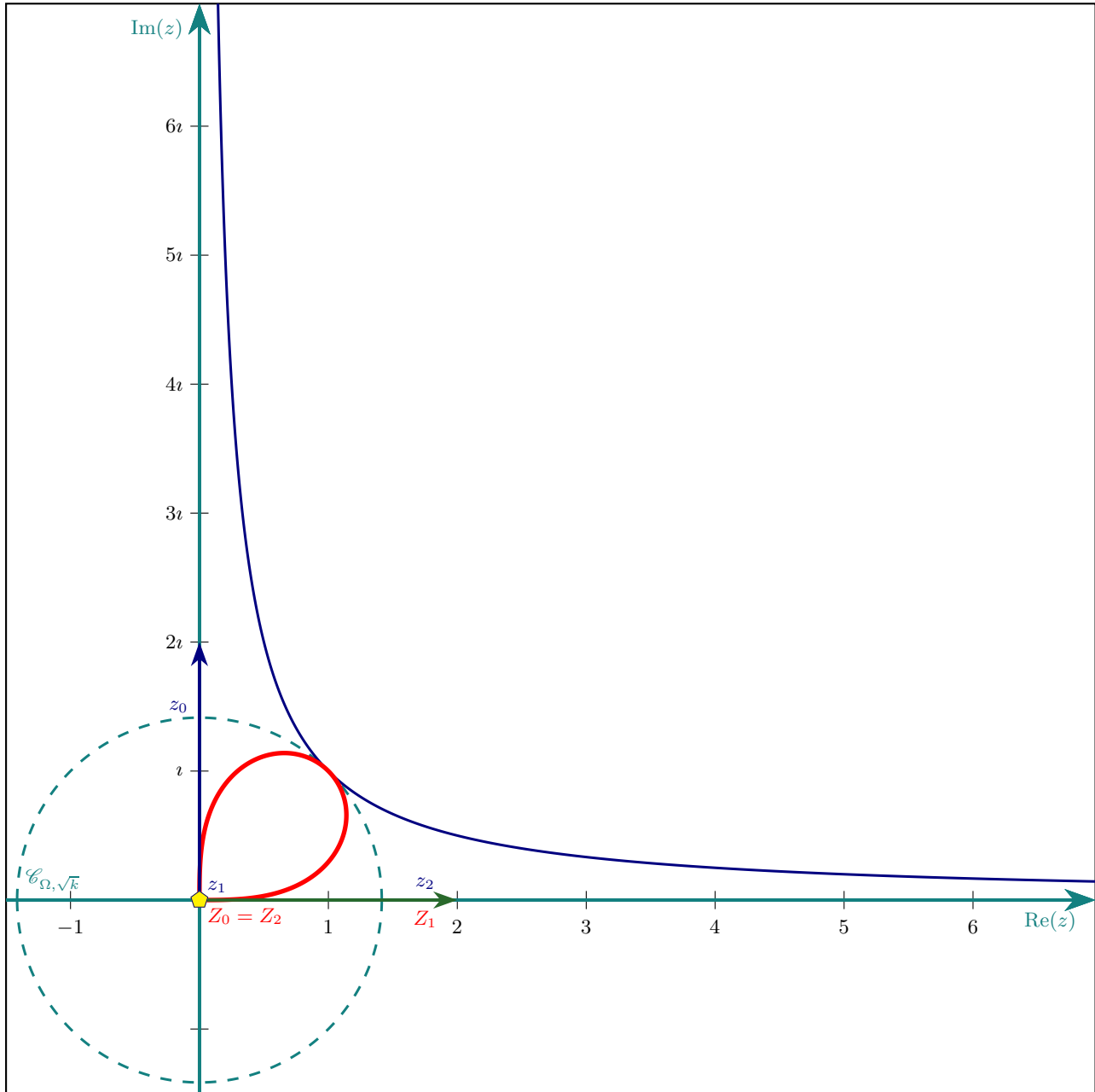


Figure 1: Courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant une boucle d'une Lemniscate de Bernoulli obtenue par inversion d'une branche d'hyperbole modélisée par une courbe de Bézier quadratique.

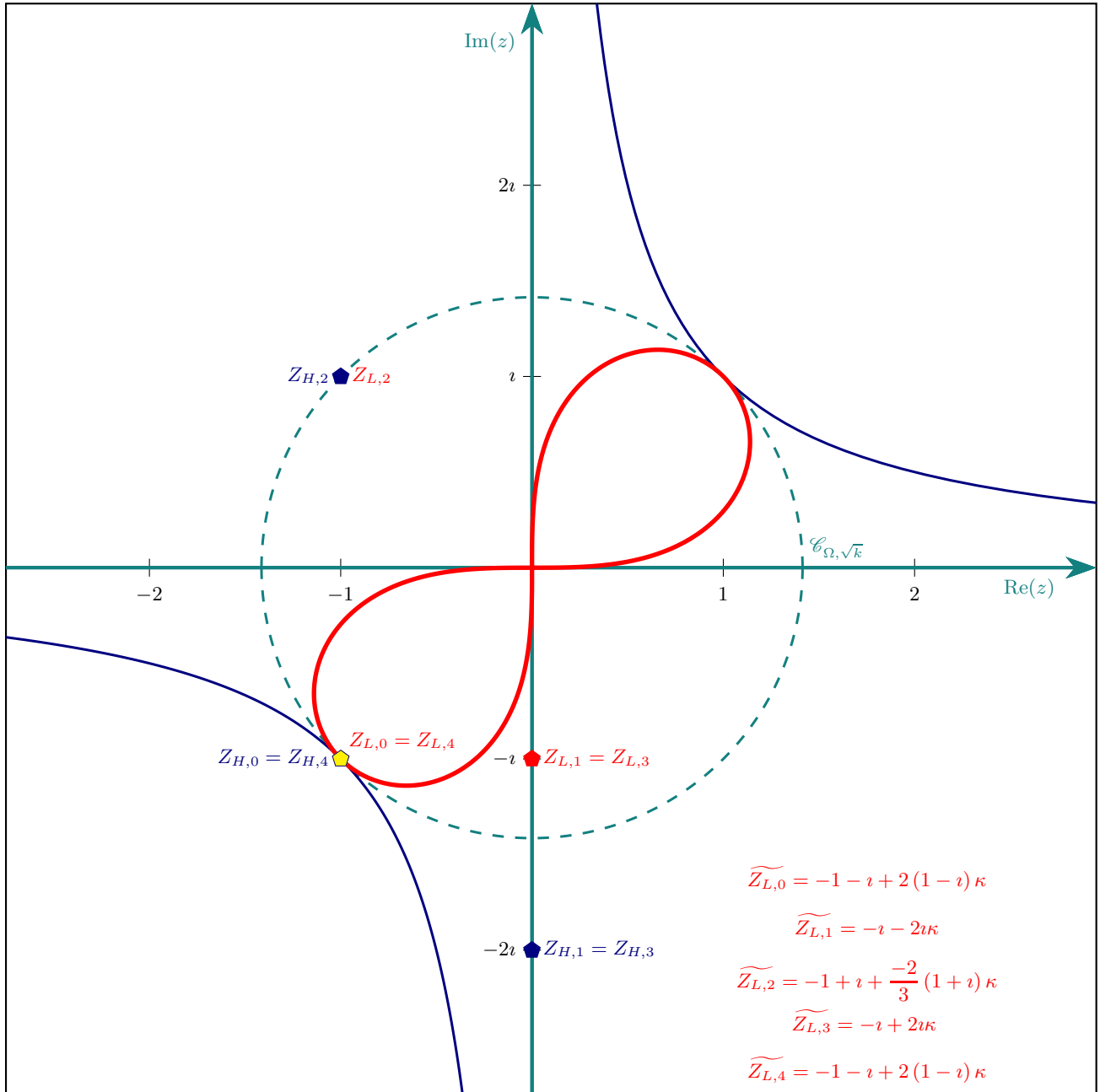


Figure 2: Courbe de Bézier quartique à poids complexes représentant une Lemniscate de Bernoulli obtenue par changement de paramètre quadratique appliquée à la courbe de Bézier quadratique représentant la boucle de la figure 1.

3.2 Limaçon de Pascal à partir d'une hyperbole

Reprenons la même courbe de Bézier et l'inversion de pôle le foyer $F(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$ et de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les

pois sont :

$$\begin{cases} \varpi_0 = \frac{z_0 - 0}{z_0 - 0} = -2i \\ \varpi_1 = \frac{0 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{0 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ \varpi_2 = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = 2 \end{cases}$$

Les points de contrôle sont :

$$Z_0 = \frac{-2i(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{-2i} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \\ &= \frac{(4\sqrt{2} - 1)}{4} + \frac{(4\sqrt{2} - 1)i}{4} \end{aligned}$$

et :

$$Z_2 = \frac{2(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Les nombres complexes massiques de contrôle sont :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} - 2i\kappa \\ \widetilde{Z}_1 = \frac{(4\sqrt{2} - 1)}{4} + \frac{(4\sqrt{2} - 1)i}{4} + (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\kappa \\ \widetilde{Z}_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2} + 2\kappa \end{cases}$$

Les équations du Limaçon de Pascal sont données dans le tableau 2.

La figure 3 montre la branche d'hyperbole et la boucle du Limaçon de Pascal, obtenue par inversion de la branche d'hyperbole précitée.

En utilisant le corollaire 1, tout le limaçon de Pascal est représentée par une courbe de Bézier quartique de points complexes massiques de contrôle $\widetilde{Z}_{L,0}$, $\widetilde{Z}_{L,1}$, $\widetilde{Z}_{L,2}$, $\widetilde{Z}_{L,3}$ et $\widetilde{Z}_{L,4}$ donnés dans le tableau 3.

La figure 4 montre l'hyperbole et le Limaçon de Pascal, obtenue par inversion de l'hyperbole précitée.

La figure 5 montre un zoom sur le Limaçon de Pascal de la figure 4.

Equation complexe :	
$z_P(t) = 162 \frac{(-5\sqrt{2} + 2) \iota t^2 + (-4\sqrt{2} + 8 + \iota(5\sqrt{2} - 2)) t + (2 + 2\iota)(\sqrt{2} - 2)}{(-1 - \iota)(18t + 9\iota(\sqrt{2} - 1) - 9)^2}$	
Equation réelle :	
$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \\ y(t) = \end{array} \right.$	$\frac{23(5\sqrt{2} - 2)t^4 - 23(13\sqrt{2} - 8)t^3 + 46(8\sqrt{2} - 7)t^2 - 184(\sqrt{2} - 1)t + 46(3\sqrt{2} - 4)}{23(2t^2 - 2t - \sqrt{2} + 2)^2}$ $\frac{23(5\sqrt{2} - 2)t^4 - 161\sqrt{2}t^3 + 23(7\sqrt{2} - 2)t^2 - 23(5\sqrt{2} - 4)t + 46(3\sqrt{2} - 4)}{23(2t^2 - 2t - \sqrt{2} + 2)^2}$

Table 2: Equations du Limaçon de Pascal.

$\widetilde{Z}_0 = \frac{10\sqrt{2} - 4}{8} + \frac{\iota(10\sqrt{2} - 4)}{8} + (2\sqrt{2} + 2 + \iota(-2\sqrt{2} - 2)) \kappa$
$\widetilde{Z}_1 = \frac{36\sqrt{2} - 8}{32} + \frac{\iota 28\sqrt{2}}{32} + (\sqrt{2} + \iota(-\sqrt{2} - 2)) \kappa$
$\widetilde{Z}_2 = \frac{66\sqrt{2} - 12}{72} + \frac{\iota(78\sqrt{2} - 12)}{72} + \left(\frac{-2\sqrt{2} - 2}{3} + \frac{\iota(2\sqrt{2} - 2)}{3} \right) \kappa$
$\widetilde{Z}_3 = \frac{36\sqrt{2} - 8}{32} + \frac{\iota 28\sqrt{2}}{32} + (-\sqrt{2} + \iota(\sqrt{2} + 2)) \kappa$
$\widetilde{Z}_4 = \frac{10\sqrt{2} - 4}{8} + \frac{\iota(10\sqrt{2} - 4)}{8} + (2\sqrt{2} + 2 + \iota(-2\sqrt{2} - 2)) \kappa$

Table 3: Points massiques complexes de contrôle pour le Limaçon de Pascal.

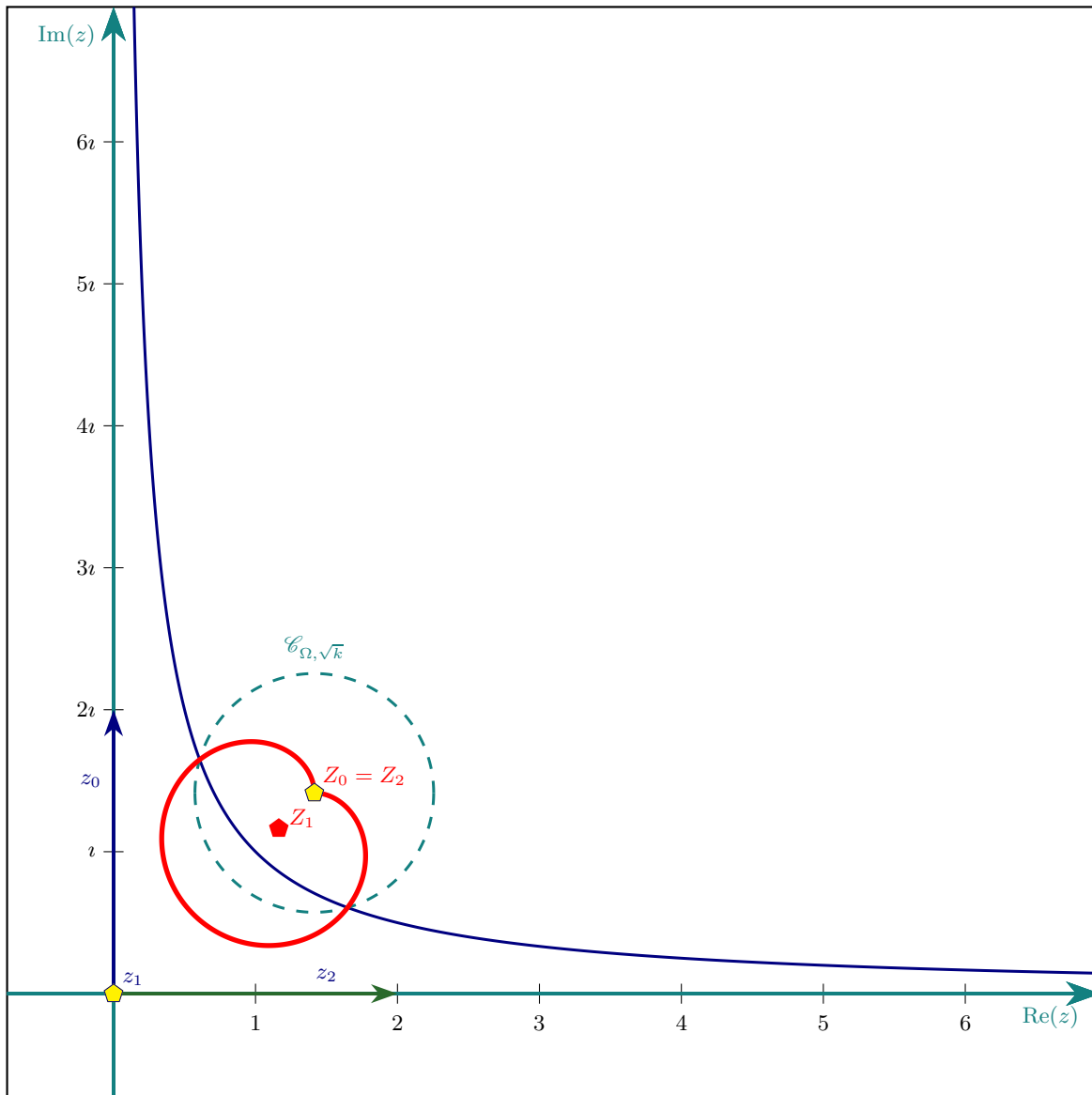


Figure 3: Courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant un Limaçon de Pascal.

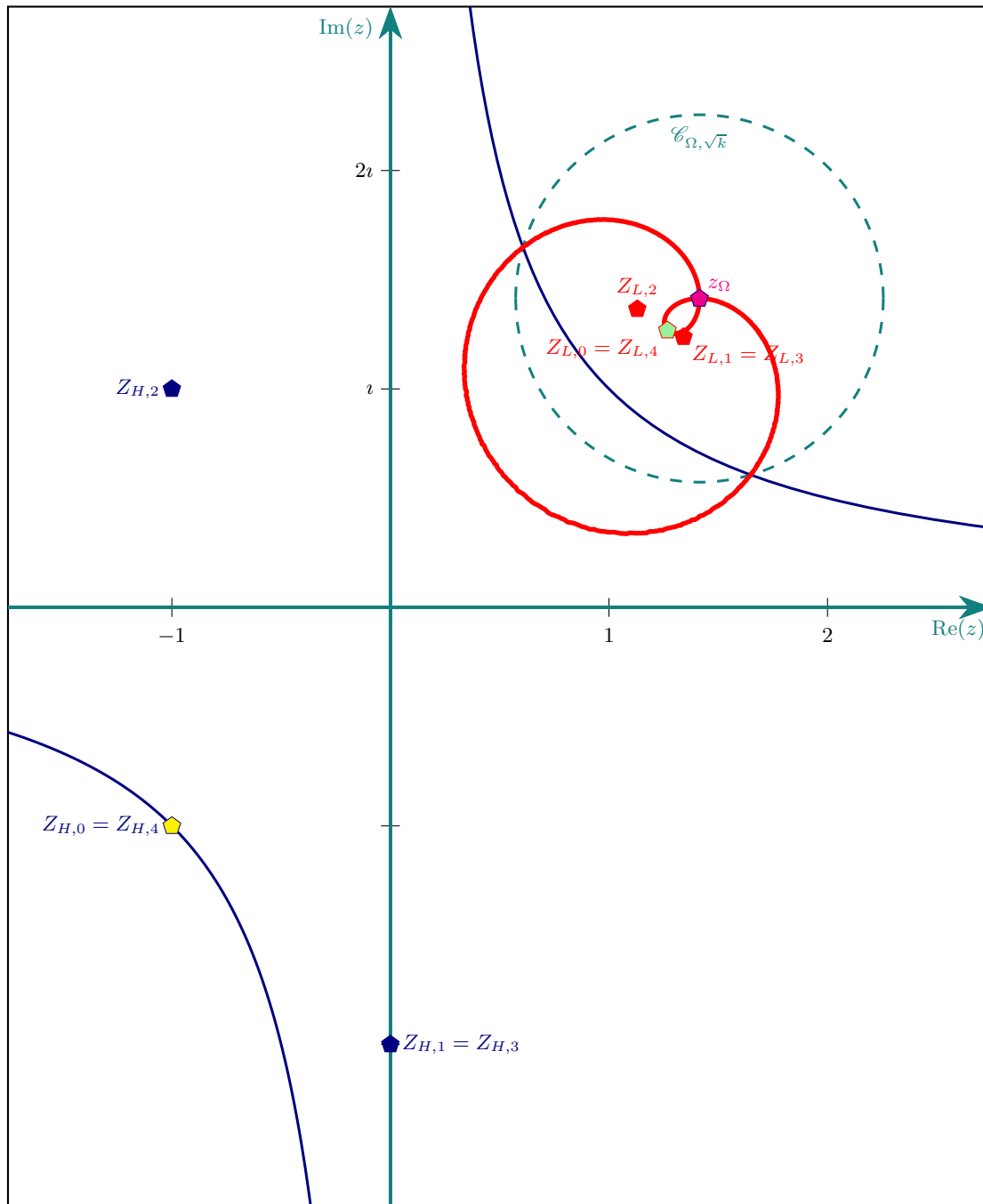


Figure 4: Courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant une boucle d'un Limaçon de Pascal.

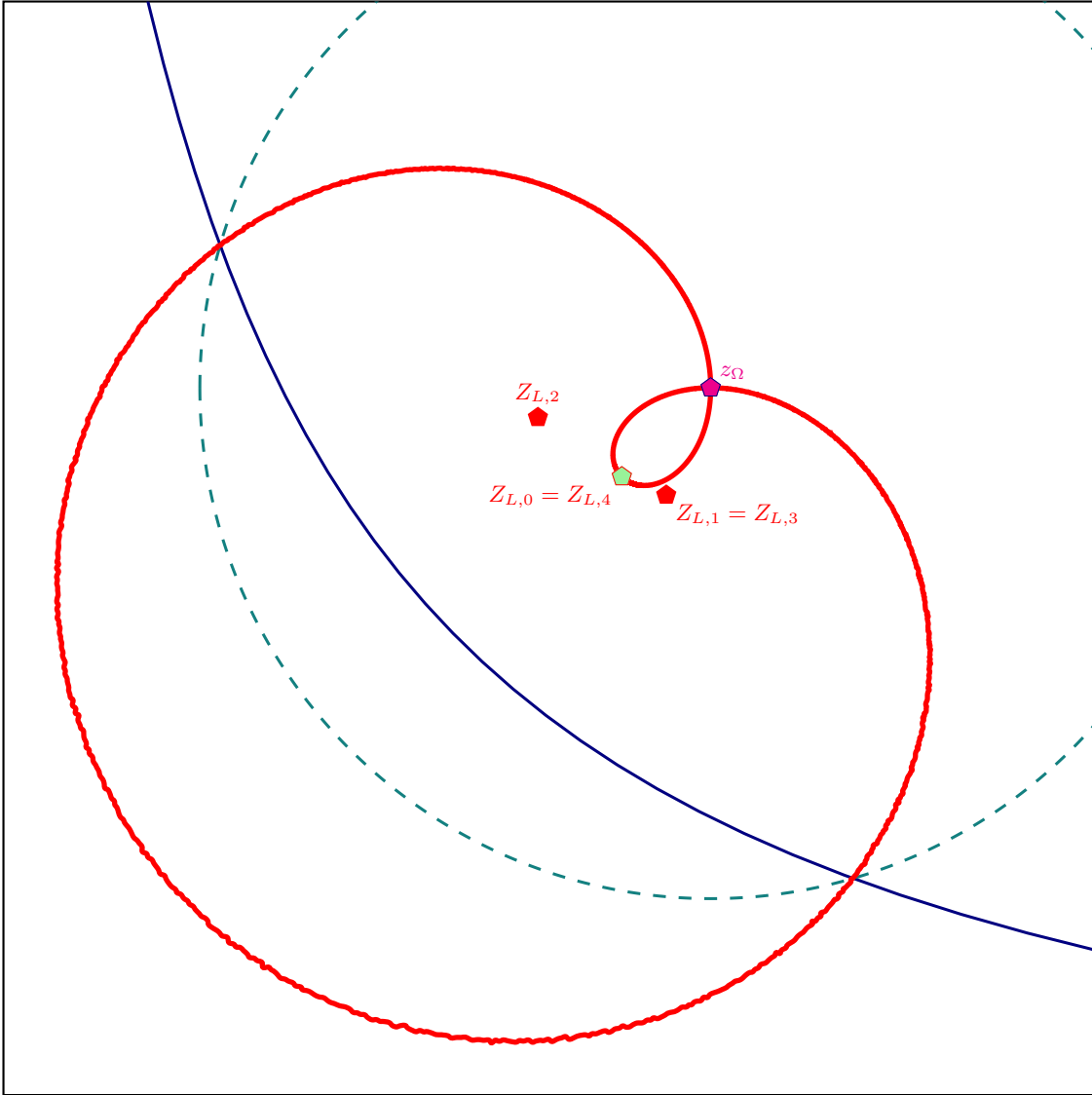


Figure 5: Courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant un Limaçon de Pascal.

3.3 Limaçon de Pascal à partir d'une Lemniscate de Bernoulli

Reprenons la première boucle de la Lemniscate de Bernoulli du paragraphe 3.1. Ses foyers sont $F_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ $F_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Les points de contrôle de la courbe de Bézier représentant cette boucle sont :

$$\begin{cases} \tilde{z}_0 = -2i\kappa \\ \tilde{z}_1 = 2 \\ \tilde{z}_2 = 2\kappa \end{cases}$$

Nous considérons l'inversion de pôle le foyer F_1 et de rapport $k = 1$.

Nous obtenons :

$$\begin{cases} \varpi_0 = -\sqrt{2}(1+i) \\ \varpi_1 = 2 \\ \varpi_2 = \sqrt{2}(-1+i) \end{cases}$$

d'une part et :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ Z_2 = 0 \end{cases}$$

d'autre part. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_0 = -\sqrt{2}(1+i)\kappa \\ \widetilde{Z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) + 2\kappa \\ \widetilde{Z}_2 = \sqrt{2}(-1+i)\kappa \end{cases} \quad (8)$$

L'équation (quadratique) complexe du Limaçon de Pascal est :

$$z_L(t) = \frac{16((1+i)(1-\sqrt{2})t(1-t))}{(4t-2i(\sqrt{2}-1)-2)^2}$$

tandis que l'équation réelle quartique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{4(\sqrt{2}-1)t(t-1)^2(t-\sqrt{2}+1)}{(2t^2-2t-\sqrt{2}+2)^2} \\ y(t) = \frac{4(\sqrt{2}-1)t^2(t-1)(t+\sqrt{2}-2)}{(2t^2-2t-\sqrt{2}+2)^2} \end{cases}$$

La figure 6 montre une boucle de la Lemniscate de Bernoulli et un arc d'un Limaçon de Pascal, obtenu par inversion de la boucle précitée.

En utilisant le corollaire 1, toute la Lemniscate de Bernoulli est représentée par une courbe de Bézier quartique de points complexes massiques de contrôle :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_{l,0} = (\sqrt{2}-1)(1+i) - 2(\sqrt{2}+2)\kappa \\ \widetilde{Z}_{l,1} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{2} - (\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i)\kappa \\ \widetilde{Z}_{l,2} = \frac{\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}+1)i}{3} - \frac{2\sqrt{2}(i-\sqrt{2})}{3}\kappa \\ \widetilde{Z}_{l,3} = \frac{1+(\sqrt{2}-1)i}{2} + (\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i)\kappa \\ \widetilde{Z}_{l,4} = (\sqrt{2}-1)(1+i) - 2(\sqrt{2}+2)\kappa \end{cases}$$

La figure 7 montre la Lemniscate de Bernoulli et le Limaçon de Pascal, obtenue par changement de paramètre quartique des deux courbes de la figure 6.

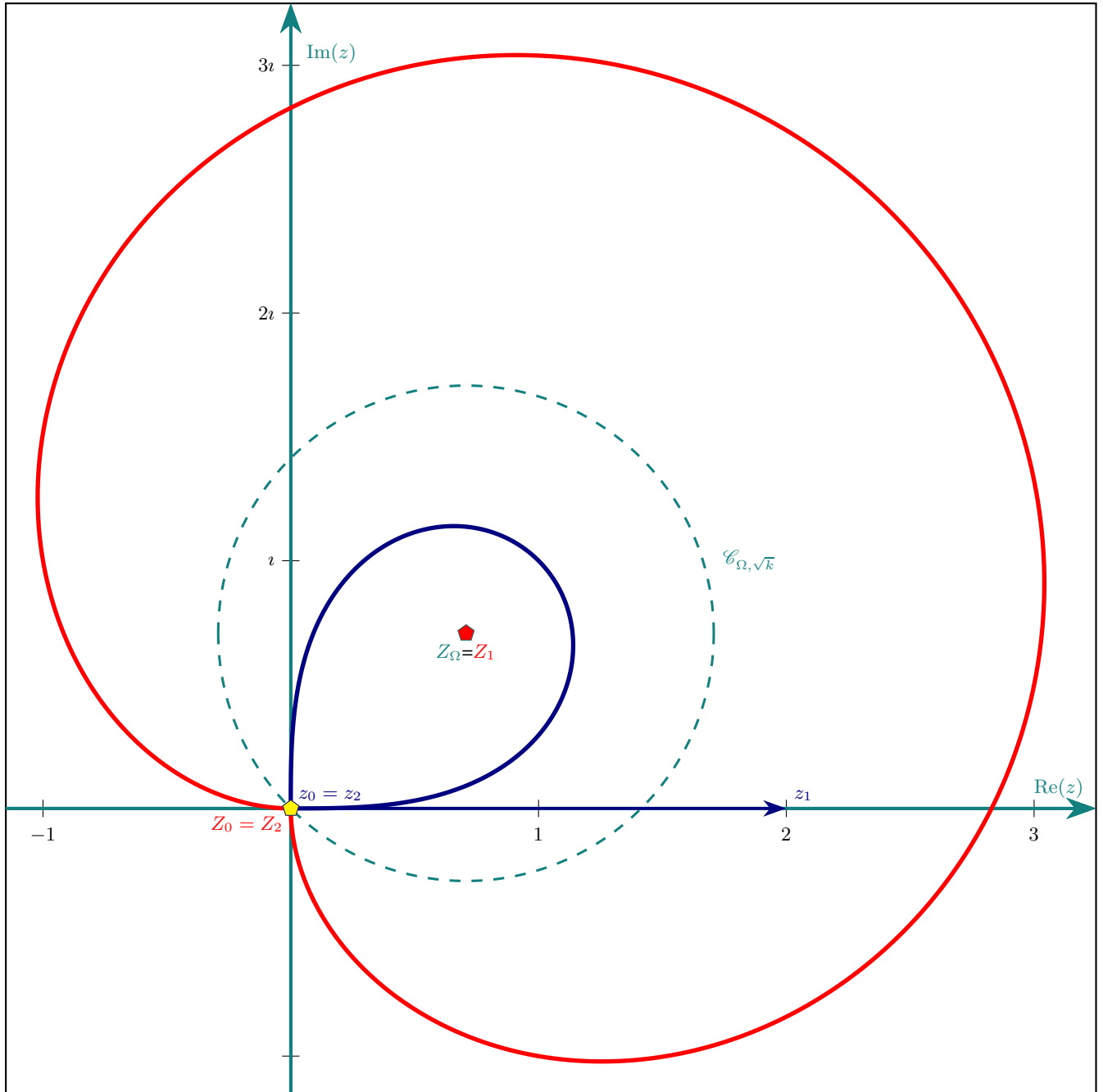


Figure 6: Courbe de Bézier quadratique à poids complexes représentant un arc d'un Limaçon de Pascal.

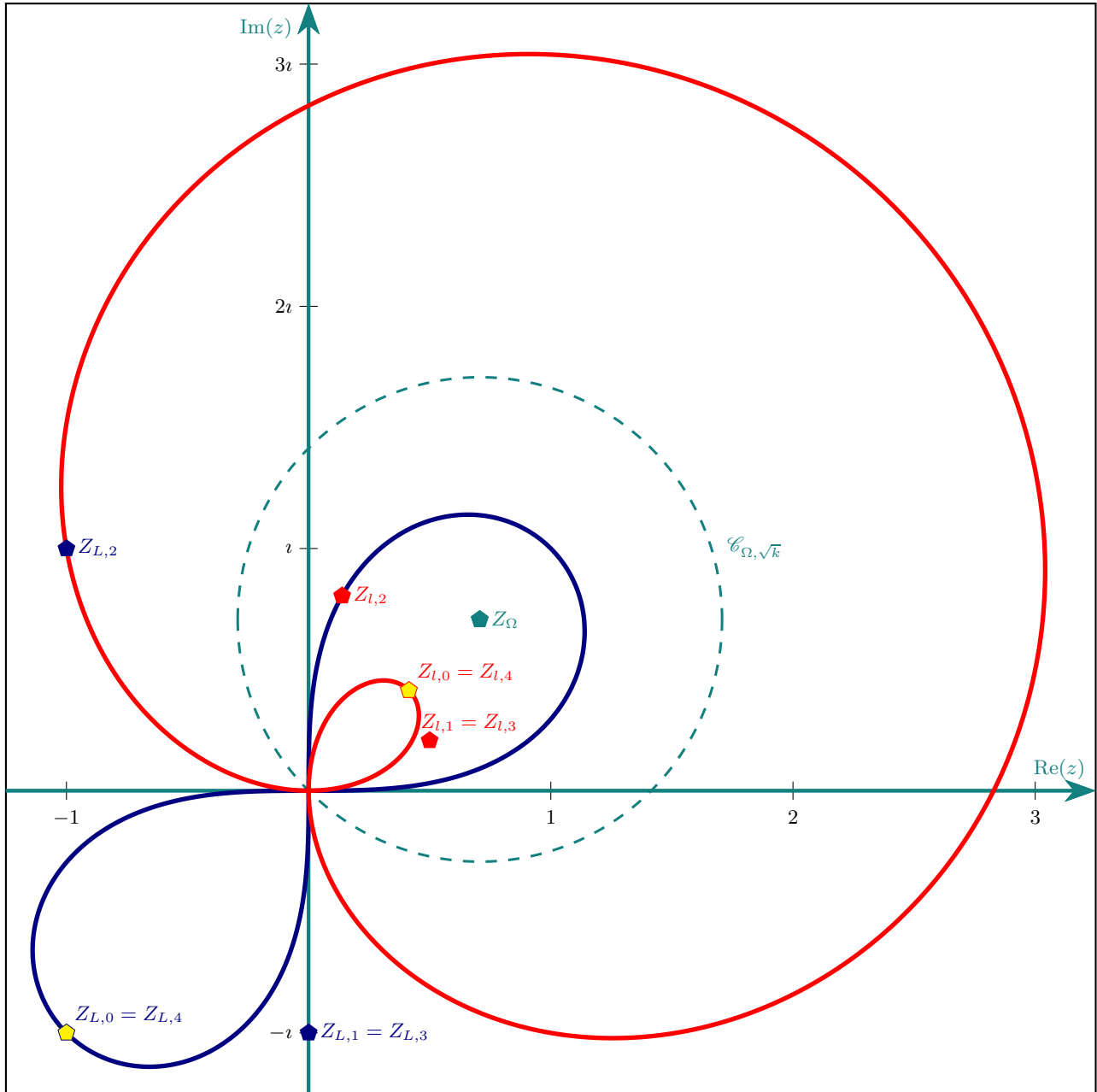


Figure 7: Courbes de Bézier quartiques à poids complexes représentant une Lemniscate de Bernouilli et un Limaçon de Pascal.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons introduit les poids complexes dans les courbes de Bézier planes afin de conserver le degré par inversion. Ceci permet de simplifier les calculs lors de changements de paramètre homographique ou quadratique.

L'étape suivante consiste à effectuer des raccords $G^1 - \mathcal{C}^1$ entre courbes de Bézier données afin de nous focaliser sur la cinématique de ces courbes.

Références

- [Béc97] J. P. Bécar. *Forme (BR) des coniques et de leurs faisceaux*. PhD thesis, Université de Valenciennes et de Hainaut-Cambrésis, LIMAV, Décembre 1997.
- [BFG19a] Jean-Paul Bécar, Laurent Fuchs, and Lionel Garnier. Courbe d'une fraction rationnelle et courbes de bézier à points massiques. Toulouse, France, 20-21 mars 2019. Université de Toulouse.
- [BFG19b] Jean-Paul Bécar, Laurent Fuchs, and Lionel Garnier. Famille à un paramètre de coniques utilisant des courbes de bézier à poids complexes. Toulouse, France, 20-21 mars 2019. Université de Toulouse.
- [BG14] J. P. Bécar and L. Garnier. Points massiques, courbes de Bézier quadratiques et coniques : un état de l'art. In *G.T.M.G. 2014*, Lyon, 26 au 27 mars 2014.
- [Fer19] Robert Ferréol. "Inverse d'une courbe par rapport à un point". <https://mathcurve.com/courbes2d/inverse/inverse.shtml>, 2019.
- [FJ89] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes et surfaces rationnelles*, volume RMA 12. Masson, 1989.
- [FJ92] J. C. Fiorot and P. Jeannin. *Courbes splines rationnelles, applications à la CAO*, volume RMA 24. Masson, 1992.
- [GB16] Lionel Garnier and Jean-Paul Bécar. Mass points, Bézier curves and conics : a survey. In *Eleventh International Workshop on Automated Deduction in Geometry*, Proceedings of ADG 2016, pages 97–116, Strasbourg, France, June 2016. <http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/~garnier/publications/adg2016/>.
- [GD13] L. Garnier and L. Druoton. Inversions de coniques à centres vues comme des cercles. Université de Limoges, Novembre 2013.
- [SR09] J. Sánchez-Reyes. Complex rational Bézier curves. *Comput. Aided Geom. Des.*, 26(8) :865–876, nov 2009.

A Changement de paramètre quadratique

Le changement de paramètre quadratique, via l'utilisation de la fonction h_2 définie par la formule :

$$h_2(u) = \frac{a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2}{d(1-u)^2 + 2eu(1-u) + fu^2} \quad (9)$$

permet :

- d'obtenir toute la courbe i.e. envoyer l'intervalle $[0; 1]$ sur $[-\infty; +\infty]$;
- de changer la vitesse de parcours sur $[0; 1]$ et permet d'obtenir des points extrémaux stationnaires.



Théorème 2 : Changement de paramètre quadratique pour le degré 2

Soit une courbe de Bézier quadratique γ de points de contrôle massiques \tilde{z}_0, \tilde{z}_1 et \tilde{z}_2 , de support la courbe c .

Soit h_2 définie par la formule (9), alors $\gamma \circ h_2$ est la courbe de Bézier quartique de points de contrôle massiques $\tilde{Z}_0, \tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \tilde{Z}_3$ et \tilde{Z}_4 de support la courbe c avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{Z}_0 = (d-a)^2 \square \tilde{z}_0 \oplus 2a(d-a) \square \tilde{z}_1 \oplus a^2 \square (P_2; \omega_2) \\ \tilde{Z}_1 = (b-e)(a-d) \square \tilde{z}_0 \oplus (ae+bd-2ab) \square \tilde{z}_1 \oplus ab \square \tilde{z}_2 \\ \tilde{Z}_2 = \frac{ac-af+2e^2-4eb+2b^2-cd+fd}{3} \square \tilde{z}_0 \\ \oplus \frac{4eb-4b^2-2ac+af+cd}{3} \square \tilde{z}_1 \oplus \frac{ac+2b^2}{3} \square \tilde{z}_2 \\ \tilde{Z}_3 = (f-c)(e-b) \square \tilde{z}_0 \oplus (-2bc+bf+ce) \square \tilde{z}_1 \oplus cb \square \tilde{z}_2 \\ \tilde{Z}_4 = (c-f)^2 \square \tilde{z}_0 \oplus 2c(f-c) \square \tilde{z}_1 \oplus c^2 \square \tilde{z}_2 \end{array} \right. \quad (10)$$

Démonstration :

Nous avons :

$$1 - h(u) = \frac{(d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2}{d(1-u)^2 + 2eu(1-u) + fu^2} \quad (11)$$

et :

$$\gamma(t) = (1-t)^2 \square (P_0; \omega_0) \oplus 2t(1-t) \square (P_1; \omega_1) \oplus t^2 \square (P_2; \omega_2)$$

Il suffit de s'intéresser aux numérateurs[†] de $h(u)$ et $1-h(u)$, nous avons :

$$\begin{aligned} & (1-t)^2 \square (P_0; \omega_0) \\ = & ((d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2)^2 \square (P_0; \omega_0) \\ = & (d-a)^2 (1-u)^4 \square (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 2(e-b)(d-a) 2u(1-u)^3 \square (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (4(e-b)^2 + 2(d-a)(f-c)) u^2(1-u)^2 \square (P_0; \omega_0) \\ \oplus & 4(e-b)(f-c) u^3(1-u) \square (P_0; \omega_0) \\ \oplus & (f-c)^4 u^4 \square (P_0; \omega_0) \end{aligned}$$

†. Les dénominateurs sont les mêmes et les $n+1$ polynômes de Bernstein de degré n sont de même degré.

$$\begin{aligned}
&= (d-a)^2 (1-u)^4 \square (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (e-b)(d-a) 4u(1-u)^3 \square (P_0; \omega_0) \\
&\oplus \frac{2(e-b)^2 + (d-a)(f-c)}{3} 6u^2(1-u)^2 \square (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (e-b)(f-c) 4u^3(1-u) \square (P_0; \omega_0) \\
&\oplus (f-c)^4 u^4 \square (P_0; \omega_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2t(1-t) \square (P_1; \omega_1) \\
&= 2(a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2) ((d-a)(1-u)^2 + 2(e-b)u(1-u) + (f-c)u^2) \square (P_1; \omega_1) \\
&= 2a(d-a) (1-u)^4 \square (P_1; \omega_1) \\
&\oplus (a(e-b) + b(d-a)) 4u(1-u)^3 \square (P_1; \omega_1) \\
&\oplus \frac{a(f-c) + c(d-a)}{3} 6u^2(1-u)^2 \square (P_1; \omega_1) \\
&\oplus (b(f-c) + c(e-b)) 4u^3(1-u) \square (P_1; \omega_1) \\
&\oplus c(f-c) u^4 \square (P_1; \omega_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t^2 \square (P_2; \omega_2) \\
&= (a(1-u)^2 + 2bu(1-u) + cu^2)^2 \square (P_2; \omega_2) \\
&= a^2 (1-u)^4 \square (P_2; \omega_2) \\
&\oplus ab 4u(1-u)^3 \square (P_2; \omega_2) \\
&\oplus \frac{2b^2 + ac}{3} 6u^2(1-u)^2 \square (P_2; \omega_2) \\
&\oplus bc 4u^3(1-u) \square (P_2; \omega_2) \\
&\oplus c^2 u^4 \square (P_2; \omega_2)
\end{aligned}$$

Il suffit de regrouper les termes en $(1-u)^4$, $4u(1-u)^3$, $6u^2(1-u)^2$, $4u^3(1-u)$ et u^4 .

■

En prenant $a = -1$, $b = d = f = 0$ et $e = c = 1$, nous avons :

$$h_2([0; 1]) = [-\infty; +\infty]$$

ce qui permet d'obtenir généralement toute la courbe. Nous pouvons énoncer :



Corollaire 1 : Pour obtenir toute la courbe

La fonction h_2 définie par :

$$h_2(u) = \frac{-(1-u)^2 + u^2}{2u(1-u)} = \frac{-1+2u}{2u(1-u)}$$

est une fonction continue, strictement croissante de $]0; 1[$ dans $]-\infty; +\infty[$ avec :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0^+} h_2(u) = -\infty \\ \lim_{u \rightarrow 1^-} h_2(u) = +\infty \end{cases}$$

et nous avons :

$$\begin{cases} \widetilde{Z}_0 = \widetilde{z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 \\ \widetilde{Z}_1 = \widetilde{z}_0 \oplus -1 \boxtimes \widetilde{z}_1 \\ \widetilde{Z}_2 = \frac{1}{3} \boxtimes \widetilde{z}_0 \oplus \frac{2}{3} \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \frac{-1}{3} \boxtimes \widetilde{z}_2 \\ \widetilde{Z}_3 = -1 \boxtimes \widetilde{z}_0 \oplus \widetilde{z}_1 \\ \widetilde{Z}_4 = \widetilde{z}_0 \oplus -2 \boxtimes \widetilde{z}_1 \oplus \widetilde{z}_2 \end{cases} \quad (12)$$

B Démonstration du théorème 1

Soit $M(t)$ d'affixe $z(t)$ un point de γ .

$$\begin{aligned} z(t) - z_\Omega &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} \left(\sum_{j=0}^n \chi(\omega_j) B_{j,n}(t) z_j - \sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t) z_\Omega \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_{j,n}(t)} \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) (\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega) \end{aligned}$$

d'où :

$$\overline{z(t) - z_\Omega} = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \overline{\omega_j} B_{j,n}(t)} \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)}$$

Soit $M'(t)$ d'affixe $z'(t)$ un point de l'image de la courbe de Bézier par l'inversion $i_{\Omega,k}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} z'(t) &= z_\Omega + \frac{k}{z(t) - z_\Omega} \\ &= z_\Omega + \frac{k \sum_{j=0}^n \overline{\omega_j} B_{j,n}(t)}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)}} \\ &= \frac{z_\Omega \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)} + k \sum_{j=0}^n \overline{\omega_j} B_{j,n}(t)}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) (z_\Omega \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)} + k \overline{\omega_j})}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \overline{(\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)}} \end{aligned}$$

De la relation :

$$z'(t) = \frac{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \chi(\varpi_j) Z_j}{\sum_{j=0}^n \varpi_j B_{j,n}(t)}$$

pour j dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, nous avons :

$$\varpi_j = \overline{\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega}$$

d'où :

$$\frac{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) \chi(\varpi_j) Z_j}{\sum_{j=0}^n \varpi_j B_{j,n}(t)} = \frac{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) (z_\Omega \varpi_j + k \overline{\omega_j})}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(t) (\chi(\omega_j) z_j - \omega_j z_\Omega)}$$

Nous pouvons déterminer les affixes massiques de contrôle :

$$Z_j = \frac{z_\Omega \varpi_j + k \overline{\omega_j}}{\chi(\varpi_j)}$$

■